Übungen

Abgabetermin: Freitag 04.06. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: unendliche Produkträume, Faltungen und geometrische Wahrscheinlichkeiten

Aufgabe 21 (5 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P) = (\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{B}, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}(n,n))$ und $X : \Omega \to \overline{\mathbb{N}}$,

$$X(\omega) := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \omega_n \leq n\}, \quad \inf\emptyset := \infty.$$

a) Zeigen Sie: X ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{P}(\overline{\mathbb{N}})$-messbar.

b) Zeigen Sie: P^X ist eine diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\overline{\mathbb{N}}$ mit Zähldichte
$$q(n) = 2^{-n}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n).$$

Aufgabe 22 (6 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\prod_{t\in T} \mathbb{R}, \bigotimes_{t\in T} \mathfrak{B})$ mit $T = [0, \infty)$. Prüfen Sie, ob folgende Mengen Elemente von $\bigotimes_{t\in T} \mathfrak{B}$ sind:

a) $A = \{\omega \in \Omega \mid (\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ ist konvergent in } \mathbb{R}\}$

b) $B = \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto \omega_t \text{ ist monoton}\}$

c) $C = \{\omega \in \Omega \mid \omega_n = \omega_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$

d) $D = \{\omega \in \Omega \mid t \mapsto \omega_t \text{ ist beschränkt}\}$

Aufgabe 23 (5 Punkte)
Es sei P die Gleichverteilung auf $[0, 1]$ mit zugehöriger Lebesgue-Dichte f und $Q = Poi(\lambda)$ mit der Zähldichte $g(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(n)$.

a) Bestimmen Sie Lebesgue-Dichte von $P * P$.

b) Bestimmen Sie die Verteilung von $Q * Q$.

Aufgabe 24 (4 Punkte)
Zwei Freunde verabreden sich zwischen 12 und 13 Uhr an der Mensa. Welche Wartezeit müssen sie ausmachen, damit sie sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.75 auch tatsächlich treffen? (Geometrische Wahrscheinlichkeiten)

Bitte wenden!

Die Bearbeitung der folgenden Aufgaben wird mit Sonderpunkten bewertet.

Aufgabe 25 (3* Punkte)
Es sei X eine Zufallsgröße mit $P^X = \lambda\!\!\lambda_{(0,1)}$, und es sei

$$Y := \frac{1}{(1-X)^\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Zeigen Sie, dass $f(y) = \frac{1}{\lambda} y^{-\frac{\lambda+1}{\lambda}} \mathbb{1}_{(1,\infty)}(y)$ eine $\lambda\!\!\lambda$-Dichte von P^Y ist.

Aufgabe 26 (5* Punkte)
Es seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und μ, ν Maße auf diesem. Weisen Sie jeweils $\nu \ll \mu$ nach und geben Sie jeweils eine Dichte f von ν bzgl. μ an:

a) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ beliebig, $A_0 \in \mathfrak{A}$ fest und $\nu(A) := \mu(A \cap A_0)$ für alle $A \in \mathfrak{A}$.

b) $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$, P und Q beliebige W-Maße, $\mu := P + Q$, $\nu := P$.

c) $(\Omega, \mathfrak{A})$ beliebig, λ ein σ-endliches Maß auf $\mathfrak{A}$, P und Q W-Maße mit λ-Dichten g und h, $\mu := P + Q$ und $\nu := P$.

Aufgabe 27 (3*+5* Punkte)
Es sei $(\mathfrak{A}_n)_{n\geq 0}$ eine aufsteigende Folge von σ-Algebren.

a) Finden Sie ein Beispiel, bei dem $\bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{A}_n$ keine σ-Algebra ist.

b) Zeigen Sie: Ist die Folge echt aufsteigend, so ist $\bigcup_{n\geq 0} \mathfrak{A}_n$ nie eine σ-Algebra.